FÍSICA da MATÉRIA CONDENSADA
Mestrado em Engenharia Física Tecnológica
Série M1

1. A função de Bessel $J_\nu(z)$ pode ser definida por

$$
\begin{aligned}
J_\nu(z) &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\pi e^{\pm iz\cos\varphi}\sin^{2\nu}\varphi d\varphi \\
&= 2\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\cos\varphi)\sin^{2\nu}\varphi d\varphi \\
&= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos ztdt
\end{aligned}
$$

com $\Re\nu > -\frac{1}{2}$.

a) Mostre que a função de Bessel $J_\nu(z)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2J_\nu(z)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dJ_\nu(z)}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)J_\nu(z)=0$$

b) Mostre que a função de Bessel $J_\nu(z)$ tem a seguinte expansão em série de potências

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

com $|\arg z| < \pi$.

Nota: $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n}$, $(2n)! = (2n-1)!!2^n n!$, o que implica $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$, caso particular de $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\Gamma(2z)$, fórmula de duplicação da função $\Gamma(z)$.

c) Obtenha os casos particulares

$$
\begin{aligned}
J_{-\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \\
J_{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x
\end{aligned}
$$

2. a) O integral a d dimensões de uma função que só depende da coordenada radial $r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_d^2}$, é dado por

$$\int f(r)d^dx=\int_0^\infty f(r)S_d r^{d-1}dr$$

Mostre que $S_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$ escolhendo $f(r) = e^{-\frac{r^2}{2}}$.

b) As coordenadas esféricas a d dimensões são dadas por

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{d-3}\sin\theta_{d-2}\sin\varphi \\
x_2 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{d-3}\sin\theta_{d-2}\cos\varphi \\
x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{d-3}\cos\theta_{d-2} \\
\ldots & \quad \ldots \\
x_{d-2} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\
x_{d-1} &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\
x_d &= r\cos\theta_1
\end{aligned}$$

em que $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Mostre que $r, \theta_1, \ldots, \theta_{d-2}, \varphi$ é um sistemas de coordenadas ortogonais, sendo os factores de escala $l_r = 1, l_{\theta_1} = r, l_{\theta_2} = r\sin\theta_1, \ldots, l_{d-2} = r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{d-3}$, $l_\varphi = r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{d-3}\sin\theta_{d-2}$. Conclua que o Jacobiano da transformação é dado por

$$J = \left|\frac{\partial(x_1,\ldots,x_d)}{\partial(r,\theta_1,\ldots,\theta_{d-2},\varphi)}\right| = r^{d-1}\sin^{d-2}\theta_1\sin^{d-1}\theta_2\ldots\sin\theta_{d-2}$$

c) Mostre que a integração no ângulo θ_k dá um factor

$$Sp_k = \frac{\Gamma(\frac{d-k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{d-k+1}{2})}$$

e obtenha de novo S_d.

d) Mostre que a transformada de Fourier de uma função que depende apenas da coordenada radial é dada por

$$\tilde{f} = \int e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(r) d^d x = \int_0^\infty S_d \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\left(\frac{kr}{2}\right)^{\frac{d}{2}-1}} J_{\frac{d}{2}-1}(kr) r^{d-1} f(r) dr$$

e) Calcule a transformada de Fourier de $\rho_d(r) = \frac{1}{S_d a^{d-1}}\delta(r-a)$. Mostre que

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_d(k) &= \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\left(\frac{ka}{2}\right)^{\frac{d}{2}-1}} J_{\frac{d}{2}-1}(ka) \\
&= \Gamma(\frac{d}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\frac{d}{2}+n)} \left(\frac{ka}{2}\right)^{2n}
\end{aligned}$$

e verifique os casos particulares

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_1(k) &= \cos ka \\ \tilde{\rho}_3(k) &= \frac{\sin ka}{ka}\end{aligned}$$

e o caso limite $d \to \infty$

$$\tilde{\rho}_\infty(k) = e^{-\frac{k^2}{2\sigma}}$$

sendo $\sigma = \lim_{d\to\infty} \frac{d}{a^2}$

3. a) Show that

$$\int_0^\infty e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} f(ab)$$

with $f(0) = 1$.

b) Using the identity

$$e^{-\frac{\sigma}{2}v^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma}+iuv}$$

(of the Hubbard-Stratonovich transformation type), complete the calculation obtaining

$$\int_0^\infty e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}$$