FÍSICA da MATÉRIA CONDENSADA

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Série M

1. a) Calcule o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

(sugestão: calcule o quadrado do integral usando coordenadas polares).

b) Fazendo uma mudança de variáveis mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}+xy} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma}} = e^{\frac{\sigma y^2}{2}}$$

c) Fazendo a expansão em potências de y, mostre que os momentos da distribuição de probabilidade $\rho(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ são dados por $< x^{2n+1} >= 0$, $< x^{2n} >= (2n-1)!! < x^2 >^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, sendo $< x^2 >= \sigma$. Este resultado é talvez o exemplo mais simples do teorema de Wick.

d) Fazendo uma mudança de variáveis mostre, a partir do resultado da alínea a), que

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\pi}$$

2. As funções $\Gamma(x)$ e $B(x, y)$ de Euler são definidas por

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \\ B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \end{aligned}$$

a) Mostre que

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\ \Gamma(n) &= (n-1)! \\ \Gamma(\frac{1}{2}) &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

b) Por mudanças de variável obtenha outras possíveis definições das funções $\Gamma(x)$ e $B(x,y)$

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1} du \qquad (1) \\ B(x,y) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du \end{aligned}$$

c) Por mudança de variáveis a partir da expressão para $\Gamma(x)\Gamma(y)$ obtenha

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Use as definições iniciais ou as expressões da alínea anterior.