FÍSICA da MATÉRIA CONDENSADA

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Série 2b

1. a) Calcule a expressão das susceptibilidades transversal e longitudinal do modelo de Langevin, em função da magnetização $M(H)$ e da sua derivada $M'(H) = \frac{dM}{dH}$. Interprete geometricamente. O que acontece no limite $H \to 0$? Qual o valor das susceptibilidades, na ausência de campos?

b) Considere o modelo de Heisenberg

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} J_{ij}\hat{\vec{S}}_i \cdot \hat{\vec{S}}_j - H\sum_i \hat{S}_i^z$$

para um sistema de spins clássicos, com $|\vec{S}| = S$, numa rede de dimensão d, na aproximação de campo médio.

Calcule as susceptibilidades transversal e longitudinal. O que acontece no limite $H \to 0$? Qual o valor das susceptibilidades, na ausência de campos?

2. Cadeia ferromagnética de Heisenberg e ondas de spin.

Considere uma cadeia de Heisenberg ferromagética, com N spins S, com condições fronteira periódicas, e Hamiltoniano dado por

$$\mathcal{H} = -J\sum_i \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1} - H\sum_i S_i^z.$$

a) Mostre que o estado ferromagnético $|\psi_0\rangle = |S, S, \cdots, S\rangle$ é estado próprio do Hamiltoniano. Determine a sua energia E_0.

b) Mostre que o estado $|\psi_0\rangle_i = S_i^-|\psi_0\rangle$ não é vector próprio do Hamiltoniano. Por transformação de Fourier, mostre que o estado $|\psi_0\rangle_k = \sum_{x_j} e^{-ikx_j}|\psi_0\rangle_j$ é estado próprio do Hamiltoniano. Determine a sua energia E_k. Qual a simetria do sistema que motiva esta transformação?

c) Qual é comportamento da diferença $E_k - E_0$, na ausência de campo magnético, quando $k \to 0$? Como justifica este comportamento? Dê outros exemplos de situações comparáveis.

Formulário:

$$S^-|S\ m\rangle \quad = \quad \sqrt{(S+m)(S-m+1)}|S\ m-1\rangle$$

$$S^+|S\ m\rangle \ = \ \sqrt{(S-m)(S+m+1)}|S\ m+1\rangle$$

3. Teoria de Landau para um ponto tricrítico.

Considere a energia de Landau para uma transição de fase, num ponto tricrítico, em que o termo em ϕ^4 se anula, sendo portanto necessário considerar o termo em ϕ^6 (não nulo), e que é dada por:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}r\phi^2 + \frac{1}{6}u\phi^6 - H\phi,$$

em que $r = a(T - T_C)$.

a) Calcule os expoentes críticos α, β, γ, δ, ν e η, na teoria de campo médio ou de Landau (expoentes clássicos do ponto tricrítico).

b) Tome em conta as flutuações gaussianas, para avaliar o valor médio do quadrado das flutuações do parâmetro de ordem e compare com o quadrado do valor do parâmetro de ordem, dado pela teoria de Landau.

Qual a dimensão crítica superior, abaixo da qual aqueles expoentes críticos clássicos deixam de ser válidos?

Qual a dimensão crítica inferior, abaixo da qual as flutuações destroem a transição de fase?

Formulário:

$H = 0$

$$\begin{aligned} M &\sim |T - T_C|^{\beta} \\ \chi &\sim |T - T_C|^{-\gamma} \\ C &\sim |T - T_C|^{-\alpha} \\ \xi &\sim |T - T_C|^{-\nu} \end{aligned}$$

$T = T_C$

$$M \sim H^{1/\delta}$$
$$G(q) \sim \frac{1}{q^{2-\eta}}$$